M. CARAMIA, S. GIORDANI, F. GUERRIERO, R. MUSMANNO, D. PACCIARELLI
RICERCA OPERATIVA
Isedi

Esercizi proposti nel Cap. 2 - Soluzioni

Esercizio 2.1

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_i, chili di prodotto venduti settimanalmente del composto $i = A, B, C$;

y_A, chili realizzati settimanalmente del composto A per la produzione del composto B;

y_B, chili realizzati settimanalmente del composto B per la produzione del composto C.

Modello

$$\max \quad z = 40{,}6x_A + 22{,}5x_B + 38{,}2x_C$$
$$x_A + y_A + 2{,}5x_B + 2{,}5y_B + 3{,}5x_C \leq 38$$
$$3x_B \leq y_A$$
$$x_C \leq y_B$$
$$x_A, x_B, x_C, y_A, y_B \geq 0$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^* = [38 \;\; 0 \;\; 0]$, $y^* = [0 \;\; 0]$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 1542{,}8$.

Esercizio 2.2

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, numero di lotti di viti di tipo $i = 1, 2, 3$ realizzati nel reparto $j = A, B$.

Modello

$$\max \quad z = 35(x_{1A} + x_{1B}) + 30(x_{2A} + x_{2B}) + 20(x_{3A} + x_{3B})$$
$$3{,}5x_{1A} + 3{,}2x_{2A} + 2{,}5x_{3A} \leq 1440$$
$$3{,}8x_{1B} + 3{,}5x_{2B} + 3x_{3B} \leq 2400$$
$$x_{3A} + x_{3B} \geq 0{,}2(x_{1A} + x_{1B} + x_{2A} + x_{2B} + x_{3A} + x_{3B})$$
$$x_{1A} + x_{1B} \leq 0{,}7(x_{1A} + x_{1B} + x_{2A} + x_{2B} + x_{3A} + x_{3B})$$
$$x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3A}, x_{3B} \geq 0$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^* = [149{,}879 \;\; 111{,}637 \;\; 223{,}274]$ per il reparto A, $x^* = [631{,}579 \;\; 0 \;\; 0]$ per il reparto B, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 35165{,}62$.

Esercizio 2.3

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_i, frazione di componente di tipo $i = A, B, C, D$ presente nel prodotto.

Modello

$$\min \quad z = 0{,}1x_A + 0{,}08x_B + 0{,}07x_C + 0{,}05x_D$$
$$x_A + x_B + x_C + x_D = 1$$
$$17x_A + 15x_B + 15x_C + 14x_D \geq 15$$
$$12x_A + 10x_B + 11x_C + 8x_D \geq 10$$
$$3x_A + 2x_B + 2{,}5x_C + 6x_D \leq 4$$
$$0 \leq x_A, x_B, x_C, x_D \leq 0{,}6$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^* = [0{,}2 \;\; 0 \;\; 0{,}4 \;\; 0{,}4]$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 0{,}068$.

Esercizio 2.4

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_t, frigoriferi realizzati internamente nel periodo $t = 1, 2, 3, 4, 5$;

y_t, frigoriferi realizzati esternamente nel periodo $t = 1, 2, 3, 4, 5$;

I_t, livello di inventario nel periodo $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

Modello

$$\min \quad z = \sum\nolimits_{t=1}^{5} (100x_t + 150y_t + 2I_t)$$
$$300 + x_1 + y_1 = 1200 + I_1$$
$$I_1 + x_2 + y_2 = 2100 + I_2$$
$$I_2 + x_3 + y_3 = 2400 + I_3$$
$$I_3 + x_4 + y_4 = 3000 + I_4$$
$$I_4 + x_5 + y_5 = 4000 + I_5$$
$$I_5 = 300$$
$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 2000$$
$$0 \leq y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \leq 600$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^* = [2000 \;\; 2000 \;\; 2000 \;\; 2000 \;\; 2000]$, $y^* = [300 \;\; 600 \;\; 600 \;\; 600 \;\; 600]$, $I^* = [1400 \;\; 1900 \;\; 2100 \;\; 1700 \;\; 300]$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 1419800$.

Esercizio 2.5

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_i, chili di prodotto $i = 1, 2, 3$ realizzati.

Modello

$$\max \quad z = 7x_1 + 6x_2 + 10x_3$$
$$2x_1 + 4x_3 \leq 24$$

$$0{,}7 \cdot 0{,}6x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}5x_3 \leq 10$$
$$0{,}2\, x_1 + 0{,}7 \cdot 0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}3x_3 \leq 3$$
$$0{,}7 \cdot 0{,}02x_1 + 0{,}02x_2 \leq 0{,}1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^* = [0 \;\; 5 \;\; 6]$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 90$.

Esercizio 2.6

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_t, quintali di melanzane alla parmigiana prodotte nel periodo $t = 1, 2, 3$;

I_t, livello di inventario nel periodo $t = 1, 2, 3$.

Modello

$$\min \quad z = 200x_1 + 300x_2 + 400x_3$$
$$42 + x_1 = 100 + I_1$$
$$I_1 + x_2 = 130 + I_2$$
$$I_2 + x_3 = 150 + I_3$$
$$I_1 \leq 100$$
$$I_2 \leq 100$$
$$I_3 = 50$$
$$0 \leq x_1 \leq 160$$
$$0 \leq x_2 \leq 150$$
$$0 \leq x_3 \leq 140$$
$$I_1, I_2, I_3 \geq 0$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^* = [158 \;\; 130 \;\; 100]$, $I^* = [100 \;\; 100 \;\; 50]$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 110600$.

Esercizio 2.7

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, numero di bottiglie di liquore trasportati dal deposito $i = 1, 2, 3$ al punto vendita $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Modello

$$\min \quad z = 2x_{11} + 2{,}4x_{12} + 2x_{13} + 2{,}3x_{14} + 2{,}8x_{15} + 3x_{16}$$
$$+ 2{,}5x_{21} + 3x_{22} + 1{,}8x_{23} + 2x_{24} + 2{,}6x_{25} + 2{,}4x_{26}$$
$$+ 2{,}2x_{31} + 3{,}3x_{32} + 2{,}6x_{33} + 2{,}5x_{34} + 2{,}9x_{35} + 3{,}1x_{36}$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 1200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \leq 2000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \leq 2400$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 900$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1200$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 700$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1000$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 600$$
$$x_{16} + x_{26} + x_{36} = 450$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^*_{12} = 1200$, $x^*_{23} = 700$, $x^*_{24} = 850$, $x^*_{26} = 450$, $x^*_{31} = 900$, $x^*_{34} = 150$, $x^*_{35} = 600$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 11015$.

Esercizio 2.8

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, quintali di arance trasportate da $i = 1, 2, 3$ a $j = 1, 2, 3$.

Modello

$$\begin{aligned}\max\quad z = {} & 9(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 10(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 12(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\ & - 3(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 4(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 5(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - 0{,}01(8x_{12} + 7x_{22} + 10x_{32}) - 0{,}002(6x_{11} + 5x_{21} + 9x_{31} + 6x_{13} + 8x_{23} + 11x_{33})\end{aligned}$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 45$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 32$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 26$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 13$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 18$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^*_{11} = 22$, $x^*_{12} = 5$, $x^*_{13} = 18$, $x^*_{22} = 8$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 375{,}56$.

Esercizio 2.9

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, numero di viaggi effettuati dalla nave i = A, B, C verso la destinazione j = T, N, G;

$t_{\max}$, massimo fra i tempi di utilizzo di una nave.

Modello

$$\min\quad z = t_{\max}$$
$$200x_{AT} + 300x_{BT} + 400x_{CT} = 1500$$
$$200x_{AN} + 300x_{BN} + 400x_{CN} = 1500$$
$$200x_{AG} + 300x_{BG} + 400x_{CG} = 2000$$

$$8x_{AT} + 10x_{AN} + 12x_{AG} \le t_{max}$$
$$10x_{BT} + 12x_{BN} + 14x_{BG} \le t_{max}$$
$$14x_{CT} + 18x_{CN} + 22x_{CG} \le t_{max}$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i = \text{A, B, C};\ j = \text{T, N, G}$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^*_{AN} = 5{,}047$, $x^*_{AG} = 2{,}009$, $x^*_{BG} = 5{,}327$, $x^*_{CT} = 3{,}750$, $x^*_{CN} = 1{,}227$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 74{,}579$.

Esercizio 2.10

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_i, numero di ore di recitazione nel set $i = 1, 2$ in presenza del regista;
y_i, numero di ore di recitazione nel set $i = 1, 2$ in assenza del regista;
g, numero di giorni di utilizzo del teatro.

Modello

$$\min \quad z = 300x_1 + 400y_1 + 200x_2 + 500y_2 + 500g$$
$$x_1 + y_1 = 80$$
$$x_2 + y_2 = 40$$
$$x_1 \ge 40$$
$$x_2 \ge 20$$
$$16g \ge x_1 + x_2$$
$$20g \ge x_1 + y_1$$
$$20g \ge x_2 + y_2$$
$$x_i, y_i \ge 0,\ i = 1, 2$$
$$g \ge 0$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^* = [80 \;\; 40]$, $y^* = [0 \;\; 0]$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 35750$.

Esercizio 2.11

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_i, numero di chilogrammi di materiale i = A, B, C prodotto.

Modello

$$\max \quad z = 5x_A + 8x_B + 3x_C - 500(0{,}006x_A + 0{,}008x_B)$$
$$50x_A + 80x_B + 20x_C \ge 30 \cdot 10^6$$
$$2x_C \le x_A$$
$$x_i \ge 0,\ i = \text{A, B, C}$$

Il problema risulta superiormente illimitato.

Esercizio 2.12

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_i, percentuale acquistata per l'investimento i = A, B;

y, ammontare di denaro investito in un contocorrente.

Il rendimento atteso dell'investimento A è pari a –75000 – 52500 + 135000 + 30000 + 45000 = 82500. Il rendimento atteso dell'investimento B è pari a –60000 + 37500 – 15000 – 52500 + 15000 = –75000. Il tasso d'interesse del 5% garantito dal contocorrente è assunto semestrale.

Modello

$$\max \quad z = 82500x_\mathrm{A} - 75000x_\mathrm{B} + (1{,}05^4 - 1)y + 150000$$
$$75000x_\mathrm{A} + 60000x_\mathrm{B} + y = 150000$$
$$-127500x_\mathrm{A} - 22500x_\mathrm{B} + 1{,}05y \geq 5000$$
$$7500x_\mathrm{A} - 37500x_\mathrm{B} + 1{,}05^2y \geq 6500$$
$$37500x_\mathrm{A} - 90000x_\mathrm{B} + 1{,}05^3y \geq 7000$$
$$x_\mathrm{A},\ x_\mathrm{B},\ y \geq 0$$

La soluzione ottima del problema è pari a x^*_A = 0,739, y^* = 94545,45, con valore di funzione obiettivo pari a z^* = 231375,14.

Esercizio 2.13

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ijk}, quantità di caffè trasportata da i = 1, 2 a j = 1, 2, 3 attraverso il porto di transito k = 1, 2, 3.

Come porto di transito oltre a Gioia Tauro e Taranto è stato considerato un nodo fittizio per rappresentare le operazioni di trasporto diretto. I coefficienti di costo c_{ijk} inseriti nella funzione obiettivo sono dati dalla somma dei costi di trasporto c_{ij} e c_{jk}.

Modello

$$\min \quad z = 24{,}4x_{111} + 20{,}2x_{121} + 19{,}75x_{131} + 15{,}65x_{112} + 20{,}95x_{122} + 19{,}7x_{132} + 18x_{113} + 20{,}5x_{123} + 17x_{133}$$
$$+ 20{,}4x_{211} + 16{,}2x_{221} + 15{,}75x_{231} + 16{,}15x_{212} + 21{,}45x_{222} + 20{,}2x_{232} + 15{,}75x_{213} + 15x_{223} + 10{,}2x_{233}$$
$$x_{111} + x_{121} + x_{131} + x_{112} + x_{122} + x_{132} + x_{113} + x_{123} + x_{133} \leq 3000$$
$$x_{211} + x_{221} + x_{231} + x_{212} + x_{222} + x_{232} + x_{213} + x_{223} + x_{233} \leq 3000$$
$$x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{211} + x_{212} + x_{213} = 1600$$
$$x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{221} + x_{222} + x_{223} = 1900$$
$$x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{231} + x_{232} + x_{233} = 1450$$
$$x_{ijk} \geq 0,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3$$

La soluzione ottima del problema è pari a x^*_{112} = 1600, x^*_{121} = 350, x^*_{223} = 1550, x^*_{233} = 1450, con valore di funzione obiettivo pari a z^* = 70150.

Esercizio 2.14

Il problema può essere formulato e risolto come problema di massimo flusso sulla rete $R = (N, A, u)$ utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, flusso sull'arco $(i, j) \in A$;

v, flusso netto uscente dal nodo sorgente $s \in N$.

Modello

$$\max \quad z = v$$
$$x_{s1} + x_{s2} + x_{s3} = v$$
$$x_{12} + x_{14} - x_{s1} - x_{31} = 0$$
$$x_{26} - x_{s2} - x_{12} = 0$$
$$x_{31} + x_{34} + x_{35} - x_{s3} = 0$$
$$x_{46} + x_{4t} - x_{14} - x_{34} - x_{54} = 0$$
$$x_{54} + x_{5t} - x_{35} = 0$$
$$x_{6t} - x_{26} - x_{46} = 0$$
$$-x_{4t} - x_{5t} - x_{6t} = -v$$
$$0 \le x_{s1} \le 35$$
$$0 \le x_{s2} \le 25$$
$$0 \le x_{s3} \le 50$$
$$0 \le x_{12} \le 40$$
$$0 \le x_{14} \le 50$$
$$0 \le x_{26} \le 80$$
$$0 \le x_{31} \le 35$$
$$0 \le x_{34} \le 30$$
$$0 \le x_{35} \le 40$$
$$0 \le x_{46} \le 20$$
$$0 \le x_{4t} \le 60$$
$$0 \le x_{54} \le 50$$
$$0 \le x_{5t} \le 20$$
$$0 \le x_{6t} \le 90$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^*_{s1} = 35$, $x^*_{s2} = 5$, $x^*_{s3} = 50$, $x^*_{12} = 5$, $x^*_{14} = 40$, $x^*_{26} = 10$, $x^*_{31} = 10$, $x^*_{34} = 0$, $x^*_{35} = 40$, $x^*_{46} = 0$, $x^*_{4t} = 60$, $x^*_{54} = 20$, $x^*_{5t} = 20$, $x^*_{6t} = 10$, $v^* = 90$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 90$.

Esercizio 2.15

Il problema può essere formulato e risolto come problema dell'assegnamento utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, variabile binaria che vale 1 se il veicolo $i = 1, 2, 3, 4, 5$ è assegnato al servizio di linea $j = 1, 2, 3, 4$, altrimenti vale 0.

Modello

$$\min \quad z = 177x_{11} + 417x_{12} + 612x_{13} + 218x_{14} + 146x_{21} + 504x_{22} + 699x_{23} + 188x_{24} + 270x_{31} + 31x_{32}$$
$$+ 728x_{33} + 334x_{34} + 873x_{41} + 369x_{42} + 156x_{43} + 700x_{44} + 380x_{51} + 642x_{52} + 840x_{53} + 445x_{54}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 1$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5;\ j = 1, 2, 3, 4$$

La soluzione ottima del problema è pari a $x^*_{14} = 1$, $x^*_{21} = 1$, $x^*_{32} = 1$, $x^*_{43} = 1$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 551$.